Aufgabe 1 (*Stereographische Projektion*) (4 Punkte)
Die stereographische Projektion ist gegeben durch die Abbildung

$$\phi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2, \quad \phi(x,t) = \frac{x}{1-t},$$

wobei $x \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + t^2 = 1$ und $N = (0,0,1)$.

(i) Es sei $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ und g die Gerade durch p und N. Zeigen Sie, dass $\phi(p)$ der Schnittpunkt von g mit der Ebene $\{(x,0) \,|\, x \in \mathbb{R}^2\}$ ist. Fertigen Sie eine Skizze an.

(ii) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung ψ von ϕ.

(iii) Bestimmen Sie die Matrix der ersten Fundamentalform $G = D\psi^T D\psi$ und zeigen Sie, dass $G(x) = \lambda \,\mathrm{Id}$ mit $\lambda > 0$.

Aufgabe 2 (*Längentreu, Flächentreu*) (4 Punkte)
Die Abbildung $\tilde{X} \colon \mathbb{R} \times (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{X}(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ beschreibt einen Zylinder, der die Sphäre $\mathbb{S}^2$ längs des Äquators berührt.

1. Zeigen Sie: $\tilde{X}$ ist längentreu.

2. Bezeichne $X(u,v)$ den Schnittpunkt der Strecke von $\tilde{X}(u,v)$ zum Punkt $(0,0,v)$ mit der $\mathbb{S}^2$. Berechnen Sie $X \colon \mathbb{R} \times (-1,1) \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass X flächentreu ist, und bestimmen Sie so den Flächeninhalt der Sphäre.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche und $\tilde{F} = F \circ \phi$ eine Umparametrisierung mit einem Diffeomorphismus $\phi \in C^1(V, U)$. Seien g bzw. $\tilde{g}$ die zugehörigen ersten Fundamentalformen. Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes über das Transformationsverhalten der ersten Fundamentalform folgende Aussagen:

(1) $L_g(\phi \circ \gamma) = L_{\tilde{g}}(\gamma) \quad$ für $\gamma : I \to V$,

(2) $\angle_{g(\phi(x))}(D\phi(x)v, D\phi(x)w) = \angle_{\tilde{g}(x)}(v,w) \quad$ für $x \in V$ und $v, w \in \mathbb{R}^2$,

(3) $A_g(\phi(E)) = A_{\tilde{g}}(E) \quad$ für $E \subset V$.

Aufgabe 4 (*Existenz flächentreuer Parameter*) (4 Punkte)
Sei $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche und $w_0 \in U$. Zeigen Sie: Es existiert eine Umgebung $\tilde{U}$ von w_0 und ein Diffeomorphismus $\phi : V \to \tilde{U}$, so dass $F \circ \phi : V \to \mathbb{R}^3$ flächentreu parametrisiert ist.
Hinweis: Machen Sie für ϕ den Ansatz $\phi(x,y) = (x, \varphi(x,y))$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Mittwoch, den 22.06.11.